Rérrangement de RIEMANN

[FRANCINOU-GIANELLA-NICOLAS 1, p 206]

ÉNONCÉ :

Théorème : Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série semi-convergente et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors il existe $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} = \alpha$.

DÉVELOPPEMENT :

1. Partitionnons $\mathbb{N}$ en deux ensembles : on note $E^+ := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \geq 0\}$ et $E^- := \{n \in \mathbb{N} \mid a_n < 0\}$.
   On a $\mathbb{N} = E^+ \sqcup E^-$.
   Ces deux ensembles sont infinis. En effet, supposons par l'absurde que $\mathrm{Card}(E^-) < +\infty$. Alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs à partir d'un certain rang. Ainsi la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n$ équivaut à sa convergence absolue. C'est une contradiction avec la semi-convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n$.
   Ainsi $\mathrm{Card}(E^-) = +\infty$ et, de façon analogue, $\mathrm{Card}(E^+) = +\infty$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\max\{0, a_n\} = \frac{a_n+|a_n|}{2}$ et $\min\{0, a_n\} = \frac{a_n-|a_n|}{2}$.
   Par conséquent, $\sum_{n\geq 0} \max\{0, a_n\}$ et $\sum_{n\geq 0} \min\{0, a_n\}$ divergent.

3. Construisons $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. On pose $\sigma(0) = 0$ et pour $n \in \mathbb{N}*$, on a :

   - $\sigma(n) = \min(E^+ \setminus (E^+ \cap \{\sigma(k) \mid k \in [|0, n-1|]\}))$ si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} \leq \alpha$.
   - $\sigma(n) = \min(E^- \setminus (E^- \cap \{\sigma(k) \mid k \in [|0, n-1|]\}))$ si $\sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$.

4. Il est clair que σ est injective par construction. Voyons qu'elle est surjective.
   Par l'absurde, supposons qu'il existe $N \notin \sigma(\mathbb{N})$ et sans perte de généralité $N \in E^+$.
   Alors l'ensemble $E^+ \cap \sigma(\mathbb{N})$ est fini donc : $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0, \sigma(n) \in E^-$.
   Ainsi, dès que $n \geq n_0, \sum_{k=0}^{n-1} a_{\sigma(k)} > \alpha$. Comme la série $\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ est à termes négatifs à partir d'un certain rang et que ses sommes partielles sont minorées, elle converge.
   En construisant de façon analogue à σ l'application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow E^-$ bijective strictement croissante, les séries $\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ et $\sum_{n\geq 0} a_{\phi(n)}$ diffèrent d'un nombre fini de termes donc sont de même nature. Mais les sommes partielles de la série $\sum_{n\geq 0} a_{\phi(n)}$ sont majorées par celles de $\sum_{n\geq 0} \min\{0, a_n\}$ qui divergent (vers $-\infty$).
   Ainsi, la série $\sum_{n\geq 0} a_{\phi(n)}$ diverge, ce qui est une contradiction.
   On montre de la même façon qu'on aboutit à une contradiction si $N \in E^-$ et comme $\mathbb{N} = E^+ \sqcup E^-$, σ est bijective.

5. Montrons désormais que $\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ converge vers α.
   Fixons $\epsilon > 0$. Comme $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. On dispose donc d'un entier n_1 tel que $|a_n| < \epsilon$ dès que $n \geq n_1$.
   Par injectivité, l'ensemble $\{n \in \mathbb{N} \mid \sigma(n) \leq n_1\}$ est fini. On pose $n_0 := \max\{k \in \mathbb{N} \mid \sigma(k) \leq n_1\}$. Si $n > n_0$, alors $\sigma(n) > n_1$ donc $|a_{\sigma(n)}| < \epsilon$.
   Comme les $(\sigma(n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne peuvent pas rester dans E^+ ou dans E^-, il existe un entier $N \geq n_0$ tel que $\sigma(N) \in E^+$ et $\sigma(N+1) \in E^-$.
   Posons alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n := \sum_{k=0}^{n} a_{\sigma(k)}$.

Comme $\sigma(N) \in E^+$, on a $S_{N-1} \leq \alpha$ et comme $\sigma(N+1) \in E^-$, on a aussi $S_N > \alpha$. Or, $|S_N - S_{N-1}| = |a_{\sigma(N)}| < \epsilon$ donc $\alpha + \epsilon \geq S_{N-1} + \epsilon \geq S_N > \alpha$.

Soit $n > N$. Si $S_n > \alpha + \epsilon$. Comme on passe de S_{n-1} à S_n par un saut de longueur $|a_{\sigma(n)}| < \epsilon$, on en déduit que $S_{n-1} > \alpha$. Cela entraîne que $a_{\sigma(n)} < 0$ et donc $S_{n-1} \geq S_n$.

Mais alors on a, de proche en proche, $\alpha + \epsilon < S_n \leq S_{n-1} \leq S_{n-2} \leq \ldots \leq S_N$. D'où une contradiction. Ainsi, pour tout $n > N$, $S_n \leq \alpha + \epsilon$.

On aboutit à la même contradiction si on suppose $S_n < \alpha - \epsilon$, d'où, pour tout $n > N$, on a $S_n \geq \alpha - \epsilon$.

Finalement pour tout $n > N$, on a $|S_n - \alpha| \leq \epsilon$.

On a ainsi construit $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathbb{N})$ telle que $\sum_{n\geq 0} a_{\sigma(n)}$ convergent et soit de somme α.

Remarques :

- L'idée de la construction est assez intuitive mais la preuve demeure technique : on pourra survoler les points faciles pour ne pas perdre de temps.
- On pourra illustrer sur un dessin ce que l'on fait avec les sauts à chaque n, selon l'appartenance à E^+ ou E^-.